

Chapitre 14. Dérivation

Cadre : Dans tout le chapitre, I est un intervalle.

(même si les résultats généraux s'étendent à des parties de \mathbb{R} quelconques, pourvu que $a \in I$ ne soit pas isolé dans I , c'ad pourvu que $a \in \overline{I \setminus \{a\}}$)

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

* On définit la fonction taux d'accroissement de f en a :

$$\tau_{[f;a]} : \begin{cases} I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

* La fonction f est dérivable en a si $\tau_{[f;a]}$ possède une limite finie en a .
Si c'est le cas, on définit le nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* La fonction est dérivable si elle est dérivable en tout point de I

On note $D^1(I) = D^1(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables.

Proposition 1.2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. LASSÉ :

- (i) f est dérivable en a .
- (ii) Il existe une fonction $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a et telle que $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \kappa(x)(x - a)$
- (iii) Il existe $v \in \mathbb{R}$ et une fonction $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} \forall x \in I, f(x) = f(a) + v(x - a) + (x - a)\eta(x) \\ \eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{cases}$$
- (iv) Il existe $v \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I_a \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$\begin{cases} \forall h \in I_a, f(a + h) = f(a) + vh + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{cases}$$

Si c'est le cas, on a $f'(a) = \kappa(a) = v$

Proposition 1.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Si f est dérivable en $a \in I$ alors elle est continue en a . On a donc $D^1(I) \subseteq C^0(I)$

1.2 Caractère local de la dérivabilité

Proposition 1.4. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncident au voisinage de $a \in I$

Alors f est dérivable en a ssi g l'est. Si c'est le cas, $f'(a) = g'(a)$

1.3 Dérivées à gauche et à droite

Définition 1.5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$

* (Si a n'est pas l'extrémité gauche de I), on dit que f est dérivable à gauche en a si $\tau_{[f;a]}$ admet une limite finie par valeurs inférieures en a . Si c'est le cas, on note

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

* Idem à droite, avec

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(Si cette limite existe)

1.4 Opérations

Proposition 1.6. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- * Si f est dérivable en a , λf aussi et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- * Si f est dérivable en a , $f + g$ aussi et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- * Si f et g sont dérivables en a , fg aussi et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

- * Si f et g sont dérivables en a et que $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ aussi et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Corollaire 1.7. Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables et que $\lambda \in \mathbb{R}$

- * $\lambda f, f + g, fg$ sont dérivables.
- * Si en outre, g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable.

Corollaire 1.8. $D^1(I)$ est un sous-algèbre de $C^0(I)$ (ou de \mathbb{R}^I), càd un sous-anneau stable par opération linéaire.

Proposition 1.9 (Dérivation des fonctions composées, ou "chain rule").

Soit $I, J \subseteq \mathbb{R}$ deux intervalles et $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$

- * Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$
- * Si f et g sont dérivables, $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$

1.5 Critère de dérivabilité des fonctions réciproques

Proposition 1.10. Soit $I, J \subseteq \mathbb{R}$ deux intervalles, $f : I \rightarrow J$ une bijection dérivable, $a \in I$ et $b = f(a) \in J$
Alors f^{-1} est dérivable en b ssi $f'(a) \neq 0$

Si c'est le cas, on a

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

2 Théorèmes principaux

2.1 Extrema locaux

Définition 2.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$

- * On dit que f possède un minimum local en a s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq f(a)$
- * On dit que f possède un maximum local en a s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq f(a)$

On dit que f possède un extremum local en a si elle possède un minimum ou un maximum local en a .

Définition 2.2. Un élément $a \in I$ est dit intérieur s'il n'est pas une extrémité de I .

Théorème 2.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Soit $a \in I$ un point intérieur en lequel f admet un extremum local. Alors $f'(a) = 0$

Théorème 2.4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ intérieur.

Si f est dérivable en a et qu'elle admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$

Définition 2.5. Un point $a \in I$ où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et tel que $f'(a) = 0$ s'appelle un point critique (ou un point stationnaire) pour f .

2.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 2.6 (Théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable en tout point de $]a, b[$

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 2.7 (Théorème des accroissements finis). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable en tout point de $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interprétation cinématique : Dans un mouvement rectiligne, la vitesse instantanée vaut, à un certain moment, la vitesse moyenne.

2.3 Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 2.8. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

- * f est constante ssi $f' = 0$
- * f est croissante ssi $f' \geq 0$
- * f est strictement croissante ssi $f' \geq 0$ et que la restriction de f' à tout intervalle non trivial est non nulle.

Corollaire 2.9. Soit $f \in C^0(I)$

Si $f' > 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

2.4 Inégalité des accroissements finis

Proposition 2.10. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$

Alors $\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$

Définition 2.11. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- * Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on dit que f est k -lipschitzienne si $\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$
- * On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ telle que f soit k -lipschitzienne.
- * On dit que f est une contraction s'il existe $k \in [0, 1[$ telle que f soit k -lipschitzienne.

Proposition 2.12 ("Reformulation" de l'inégalité des accroissements finis). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- * Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, f est k -lipschitzienne ssi $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$
- * f est lipschitzienne ssi f' est bornée.

2.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 2.13. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in I$.

On suppose que :

- * f est dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$
- * $f'(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} l \in \mathbb{R}$

Alors f est dérivable en a , et $f'(a) = l$

Théorème 2.14. Soit $f \in C^0(I)$, $a \in I$ tel que f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $f'(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} \pm\infty$

Alors

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \pm\infty$$

En particulier, f' n'est pas dérivable.

3 Fonction de classe C^n

3.1 Généralités

On rappelle que, pour $n \geq 1$, on peut considérer l'ensemble $D^n(I) = D^n(I; \mathbb{R})$ des fonctions n fois dérivables. Si $f \in D^n(I)$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f .

Définition 3.1.

- * $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^n si elle est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue.
- * $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite lisse ou de classe C^∞ si elle est n fois dérivable pour tout $n \geq 1$.

On note $C^n(I) = C^n(I; \mathbb{R})$ et $C^\infty(I) = C^\infty(I; \mathbb{R})$ les ensembles continus de ces fonctions.

Comme une fonction dérivable est continue, on a :

$$\dots \subseteq D^3(I) \subseteq C^2(I) \subseteq D^2(I) \subseteq C^1(I) \subseteq D^1(I) \subseteq C^0(I) \subseteq \mathbb{R}^I$$

$$\text{et on a } C^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D^n(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$$

3.2 Fonctions continûment dérivables

Remarque : "Continûment dérivable" = "de classe C^1 "

Proposition 3.2 (Théorème de la limite de la dérivée, version C^1). Soit $f \in C^0(I)$ et $a \in I$. Si $f|_{I \setminus \{a\}}$ est de classe C^1 et que $f'(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} l$ alors $f \in C^1(I)$ et $f'(a) = l$

Proposition 3.3. Soit $f \in C^1([a, b])$

Alors f est lipschitzienne.

Proposition 3.4. Soit $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ et $a \in I$ tel que $f'(a) > 0$

Alors f est strictement croissante au voisinage de a .

3.3 Opérations algébriques

Proposition 3.5. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n (resp. n fois dérivables) et $\lambda \in \mathbb{R}$

- * Alors λf est de classe C^n (resp. n fois dérivable) et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
- * Alors $f + g$ est de classe C^n est $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
- * (Formule de Leibniz) fg est de classe C^n et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Corollaire 3.6. $C^n(I)$ et $D^n(I)$ sont des sous-algèbres de \mathbb{R}^I (rappel : des sous-anneaux stables par combinaison linéaire)

Par intersection, il en va de même de $C^\infty(I)$

3.4 Composition et réciproque

Théorème 3.7. Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n (resp. n fois dérivables). Alors $g \circ f$ est de classe C^n .

Théorème 3.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^n(I)$ telle que f' ne s'annule pas. Alors f induit une bijection de I sur un intervalle J et $f^{-1} : J \rightarrow I$ est de classe C^n .

4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

4.1 Généralités

Définition 4.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$

La fonction f est dérivable en a si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite ($\in \mathbb{C}$) quand $x \rightarrow a$

Si c'est le cas, cette limite est $f'(a) \in \mathbb{C}$

Proposition 4.2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $c \in I$

La fonction f est dérivable en a ssi $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : I \rightarrow \mathbb{R}$ le sont.

Si c'est le cas, $(f')(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i \operatorname{Im}(f)'(a)$ (autrement dit : $\operatorname{Re} f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a)$, etc...).

S'étendent sans difficulté au cadre complexe : le caractère local, les théorèmes d'opération et la notion de fonction de classe C^n : on obtient des ensembles $D^n(I, \mathbb{C}), C^n(I, \mathbb{C}), C^\infty(I, \mathbb{C})$.

Rappel : On a vu au chapitre 5 que $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \end{cases}$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \alpha e^{\alpha x}$.

Par une récurrence immédiate, c'est juste une fonction lisse.

En revanche, notre section B s'écroule :

- * La notion d'extremum n'a plus de sens
- * L'énoncé du théorème de Rolle aurait un sens, mais il est faux.

Par exemple : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$ est lisse, vérifie $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant $f' : t \mapsto ie^{it}$ ne s'annule jamais

(on a même $|f'| = 1$)

Rolle et TAF sont fondamentalement des théorèmes en dimension 1.

4.2 Inégalité des accroissements finis

Le programme officiel énonce l'inégalité des accroissements finis pour $f \in C^1(I, \mathbb{C})$ avec la démo suivante (qu'on comprendra plus tard).

Proposition 4.3. Si $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq k$, on a

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| dt \leq \int_a^b k dt \leq k|b - a|$$

En fait, l'inégalité des accroissements finis reste vraie, pour $f \in D^1(I, \mathbb{C})$